

## DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS AS EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

(Introdução ao estudo de um novo ramo da Matemática : a Álgebra)

### Objetivos :

- 1 — Desenvolver nos alunos as *compreensões* básicas relativas :
  - 1.1 — ao uso de letras para generalizar as propriedades dos números e as soluções dos problemas;
  - 1.2 — ao valor numérico das expressões algébricas;
  - 1.3 — às operações com monômios;
  - 1.4 — às equações da forma  $ax = b$  e seu emprêgo na solução de problemas.
  
- 2 — Levar os estudantes ao domínio das *habilidades específicas* seguintes :
  - 2.1 — uso da linguagem algébrica;
  - 2.2 — cálculo com expressões monômias;
  - 2.3 — resolução de equações simples do tipo  $ax = b$ ;
  - 2.4 — pôr um problema em equação.

3 — Desenvolver nos educandos *atitudes* favoráveis para com os seguintes aspectos :

a.1 — aprendizagem da Algebra;

a.2 — valor presente e futuro do estudo da Algebra.

b) Continuar a desenvolver nos alunos a capacidade de *generalização* e de *raciocínio*. Iniciar os alunos na *abstração*.

4 — Fazer com que os alunos tenham *interêsse* pela resolução de problemas por meio das equações.

**Nota ao professor :** Nesta unidade os algoritmos do cálculo algébrico são apresentados nos casos simples, a fim de se poder chegar rapidamente à resolução de equações e problemas. Em unidades posteriores o assunto será pormenorizado, dispondo então o aluno dessa adequada motivação.

## TESTES DE SONDA GEM

### 1.ª questão

Complete as seguintes afirmações :

a) O valor absoluto de  $-3$  é .....

b) Dois números relativos são simétricos quando .....

c) A soma de dois números simétricos é igual a .....

d) Todo número elevado a zero é igual a .....

### 2.ª questão

Efetue :

$$\begin{array}{r} -5 \quad + 9 \quad (+3) - (-5) = \\ -3 \quad -12 \quad (-4) - (-7) = \\ \hline \end{array}$$

$$5 - (3 - 14) =$$

### 3.ª questão

Efetue as seguintes operações :

$$(-5)(+4) = \quad (+28) \div (-4) =$$

$$(-3)(-7) = \quad (-30) \div (-5) =$$

4.ª questão

Complete as seguintes igualdades :

$$(-10)^3 (-10)^2 = (-10)^{5^1} = \quad (-4)^{11} \div (-4)^9 = (-4)^{5^0} =$$

5.ª questão

Complete as igualdades abaixo, em que m, x e p representam números e  $m > p$ .

$$a^1 =$$

$$a^m \times a^p =$$

$$a^0 =$$

$$a^m \div a^p =$$

6.ª questão

Escreva algo que você já tenha lido ou ouvido a respeito da Álgebra.

7.ª questão

Você acha que o estudo da Álgebra deve ser interessante? Justifique a resposta.

## APRESENTAÇÃO DA UNIDADE

### 1 — A linguagem algébrica

Quando um principiante folheia um livro de Matemática e depara com várias *fórmulas*, sente em geral uma desconfortável sensação de medo.

No entanto, uma fórmula é tão simplesmente a tradução para uma linguagem especial, a *linguagem algébrica*, de pensamentos expressos na linguagem comum. Seja, por exemplo, calcular a área de um triângulo.

LINGUAGEM COMUM	LINGUAGEM ALGÉBRICA
I) A área do triângulo	I) A
II) é igual ao	II) =
III) semi-produto dos números que representam as medidas de sua base e de sua altura em uma mesma unidade.	III) $\frac{b \cdot h}{2}$

Observem que

no estudo das grandezas a linguagem algébrica é mais cômoda do que a linguagem comum e nos permite economia de tempo.

## 2 — As equações

As igualdades como  $A = \frac{bh}{2}$ , onde há uma letra cujo valor desejamos determinar (incógnita), chamam-se *equações*.

As equações constituem um recurso fabuloso para a resolução de problemas, sejam êles de Geometria, de Física, de Química, de Cosmografia, de Estatística, de Economia, de técnica de construção, de técnica militar, etc.

Portanto,

as equações constituem um recurso de ordem geral para a resolução de problemas.

## 3 — Necessidade do estudo da Álgebra

Segue-se então que, além dos matemáticos profissionais, todos os que pretendem seguir carreiras como a Engenharia (em qualquer dos seus ramos), a Arquitetura, a Agronomia, qualquer das carreiras militares, etc., assim como todos aquêles que visam a pesquisar, seja em Medicina, em Educação ou no que fôr, terão que resolver equações e, portanto, necessitam estudar Álgebra.

Conclusão :

A aprendizagem das noções básicas de Álgebra é necessária para o estudo de várias disciplinas escolares e para o exercício futuro de várias profissões.

## 4 — O assunto desta unidade

Esta unidade é uma introdução ao estudo da *Álgebra*. Nela travaremos conhecimento com tipos simples de equações chamadas *lineares*.

No entanto, para resolver as equações é preciso estar familiarizado com o cálculo de expressões que contêm números e letras — as chamadas *expressões algébricas*.

Iniciaremos, pois, a unidade apresentando algumas expressões algébricas simples e as regras pelas quais podemos adicioná-las, subtraí-las, multiplicá-las e dividi-las.

Vocês que aprenderam a calcular muito bem com os números inteiros, com as frações e com os números relativos, vão encontrar bastante facilidade no estudo da Álgebra, preparando-se para usufruir as indiscutíveis vantagens que decorrem da sua aplicação inteligente.

**TESTE DE CONTRÔLE DA APRESENTAÇÃO  
DA UNIDADE**

1.ª questão

Utilize a linguagem algébrica para escrever as seguintes propriedades.

LINGUAGEM COMUM

- I) O produto de qualquer número por 1 é igual ao próprio número.
- II) A soma de dois números não se altera quando se troca a ordem das parcelas (propriedade comutativa da adição).
- III) O produto de dois números não se altera quando se troca a ordem dos fatores (propriedade comutativa da multiplicação).
- IV) Para multiplicar potências de mesma base, elevamos a base comum a um expoente que é a soma dos expoentes dos fatores.
- V) Para dividir potências de mesma base, elevamos a base comum a um expoente igual à diferença entre os expoentes do dividendo e do divisor.

LINGUAGEM ALGÉBRICA

2.ª questão

Enuncie com as palavras de uso corrente as verdades contidas nas seguintes igualdades :

LINGUAGEM ALGÉBRICA	LINGUAGEM COMUM
I) $n$ é um número natural. $n^n = 1$	I)
II) $a, b, e c$ são números relativos. $a \cdot (b + c) = ab + ac$	II)

3.ª questão

Que é equação ?

4.ª questão

Para que servem as equações ?

5.ª questão

Como se chama o ramo da Matemática que ensina a resolver as equações ?

6.ª questão

Cite algumas razões pelas quais devemos estudar Algebra.

7.ª questão

Que vamos estudar nesta unidade ?

8.ª questão

Você acha que vai gostar de estudar Algebra ? Justifique a resposta.

## APRESENTAÇÃO DA PRIMEIRA SUBUNIDADE

### VALOR NUMÉRICO DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

#### 1 — Uso das letras

Seja a soma  $3 + 5 = 8$ . Mudando a ordem das parcelas, temos  $5 + 3 = 8$ . Resulta pois

$$3 + 5 = 5 + 3 \quad (1)$$

Esta conclusão pode ser enunciada assim: a ordem em que os números 3 e 5 são adicionados não altera o valor da soma.

Vocês já aprenderam que esta propriedade (comutativa) não se verifica apenas para 3 e 5. De fato, dados dois *números inteiros quaisquer*, a sua soma não se altera quando se muda a ordem das parcelas. Chamando de  $x$  e  $y$  dois números inteiros quaisquer, resulta pois:

$$x + y = y + x \quad (2)$$

A igualdade (1) mostra que a soma de 3 e 5 possui a propriedade comutativa; a igualdade (2) é *geral*, isto é, mostra que a soma de dois números inteiros quaisquer possui a propriedade comutativa.

Portanto,

substituindo os números por letras, conseguimos representar de modo geral as propriedades das operações.

#### 2 — Expressão algébrica

Expressão algébrica é um conjunto de números e letras submetidos a um número determinado de operações aritméticas.

1.º exemplo:  $2x$

2.º exemplo:  $3x + 3$

A primeira expressão indica que se deve multiplicar por 2 o valor de  $x$ . Observem que

para indicar a multiplicação de uma letra por um número ou por outra letra não necessitamos usar o sinal  $\cdot$  ou sinal  $\times$ .

A expressão algébrica é *racional* em relação a uma letra quando essa letra só está submetida às operações: adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação de expoente inteiro.

1.º exemplo:  $2x^2 + 3x + 5$  é racional;

2.º exemplo:  $2x + \sqrt{3}$  é racional;

3.º exemplo:  $2\sqrt{x} + 3$  é irracional;

4.º exemplo:  $5x^{1/2} + 2$  é irracional.

A expressão algébrica é *inteira* em relação a uma letra quando ela não figura em denominador e não está elevada a expoente negativo.

1.º exemplo:  $2x^2 + 3x + 5$  é inteira;

2.º exemplo :  $\frac{x}{2} + 3$  é inteira;

3.º exemplo :  $\frac{2}{x-1} + 3$  é fracionária;

4.º exemplo :  $2x^{-1} + 3$  é fracionária.

### 3 — Valor numérico

Dada uma expressão algébrica como  $x^2 + 3x + 2$ , podemos substituir  $x$  por um número relativo qualquer e efetuar os cálculos indicados.

O resultado será um *valor numérico* da expressão dada.

1.º exemplo : calcular o valor numérico de  $x^2 + 3x + 2$  para  $x = 1$ .

$$\text{Temos : } 1^2 + 3 \times 1 + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$$

2.º exemplo : calcular o valor numérico de  $x^2 + 3x + 2$  para  $x = -1$ .

$$\text{Temos : } (-1)^2 + 3(-1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

Como a adição, a subtração, a multiplicação e a potenciação de expoente inteiro e positivo são sempre possíveis com os números relativos, podemos dizer que

uma expressão algébrica racional inteira tem sempre valor numérico, sejam quais forem os valores dados às letras que ela contém.

Uma expressão algébrica fracionária só não tem valor numérico para os valores de suas letras que anulam o denominador, pois a *divisão por zero é impossível*.

Exemplo : a expressão  $\frac{3}{x-2}$  (fracionária) só não tem valor numérico para  $x = 2$ .

## ESTUDO DIRIGIDO — 1.ª SUBUNIDADE

- 1 — Estude com bastante cuidado a apresentação da primeira subunidade. Você dispõe de 10 minutos para esse fim.
  - 1.1 — A leitura é um dos melhores meios de que dispomos para aprender. Leia com eficiência !
  - 1.2 — Para isso faça uma leitura rápida de toda a subunidade.
  - 1.3 — Leia agora mais devagar, item por item, o mesmo texto, eliminando as dúvidas que porventura existam.
  - 1.4 — Use lápis de cores para destacar o essencial.
  - 1.5 — Medite no que leu.
  - 1.6 — Certifique-se de que aprendeu bem o assunto. Se assim fôr, passe à tarefa seguinte, mesmo que os 10 minutos não se tenham esgotado.
  
- 2 — Responda, sem consultar a apostilha, ao seguinte questionário :
  - 2.1 — Qual é a vantagem que decorre do uso das letras em Matemática ?
  - 2.2 — Que é expressão algébrica ?
  - 2.3 — Que é expressão algébrica racional ?
  - 2.4 — Que é expressão algébrica inteira ?
  
- 3 — Abra a apostilha e corrija as suas respostas.

4 — Resolva os seguintes exercícios. Se achar necessário pode consultar a apostilha.

4.1 — Escreva RI ou RF adiante de cada expressão seguinte, conforme seja, respectivamente, racional inteira ou racional fracionária :

a)  $2x + 5$       c)  $\frac{2}{3}x + 5$       e)  $2\sqrt{x} + 1$

b)  $3x^{-1} + 2$       d)  $\frac{5}{x} + 1$       f)  $3x^{-1} + \sqrt{2}$

4.2 — Calcule os valores numéricos das expressões seguintes para os valores fixados adiante de cada uma delas :

a) $2x + 3$	para $x = 0$
b) $5x - 5$	" $x = 1$
c) $3x - 3$	" $x = -1$
d) $x^2 - 9$	" $x = 3$
e) $x^2 - 9$	" $x = -3$
f) $x^2 - 5x + 6$	" $x = 3$
g) $\frac{a^2}{4} \sqrt{3}$	" $a = 2$
h) $\frac{x-2}{3} + \frac{x+4}{5}$	" $x = 6$

4.3 — As expressões abaixo são fracionárias e, portanto, não têm valor numérico para certos valores de  $x$ . Quais são eles ?

a)	b)	c)
$\frac{1}{x-3}$	$\frac{2}{x-1}$	$\frac{1}{x-a}$

5 — Corrija seus exercícios.

6 — Anote seu rendimento. Procure melhorar sempre.

## APRESENTAÇÃO DA 2.<sup>a</sup> SUBUNIDADE

### REDUÇÃO DE TERMOS SEMELHANTES

#### 1 — Monômios e polinômios

Seja a expressão inteira  $-2ax^2$ . Observemo-la : o número  $(-2)$  e as letras  $a$  e  $x$  estão ligados apenas por multiplicações. (\*) As expressões desse tipo chamam-se *monômios* ou *têrmos*.

Monômio ou termo é a expressão algébrica em que só figura a operação de multiplicar.

Se a expressão algébrica inteira é formada pela soma de vários monômios, recebe o nome de *polinômio*.

Ex. :  $x^2 + 3x + 1$  é um polinômio.

#### 2 — Coeficiente de um monômio

Chama-se coeficiente de um monômio o fator numérico que ele contém acompanhado do respectivo sinal. (\*\*)

Ex. : No monômio  $-2ax^2$  o coeficiente é  $-2$ .

As letras com os respectivos expoentes constituem a *parte literal*.

(\*) A potenciação de expoente inteiro e positivo é uma multiplicação.  
(\*\*) Quando o sinal do coeficiente é +, podemos deixar de escrevê-lo.

### 3 — Grau de um monômio

Grau de um monômio em relação a um grupo de letras é a soma dos seus expoentes.

Quando não se indica quais são as letras, deve-se tomar o grau em relação a todas elas.

Ex. : No monômio  $5ax^2y^3$  o grau em relação aos fatores  $x$  e  $y$  é 5; em relação aos fatores  $a$  e  $x$  é 3; em relação aos fatores  $a$  e  $y$  é 4; e em relação a todas as letras é 6.

### 4 — Termos semelhantes

Dois ou mais termos são semelhantes quando têm a mesma parte literal.

Ex. :  $2ab^2x^3$  e  $-7ab^2x^3$  são semelhantes.

### 5 — Redução de termos semelhantes

Vocês sabem que

$$5 \text{ aviões} - 8 \text{ aviões} + 6 \text{ aviões} = 3 \text{ aviões}$$

Para ganhar tempo poderíamos escrever apenas

$$5a - 8a + 6a = 3a$$

Da mesma forma

$$3b + 2b - b = 4b$$

$$8x - 9x + 2x = x \text{ (coeficiente 1 não se escreve).}$$

$$5x^2y + 2x^2y - 9x^2y = -2x^2y$$

Isso é o que se chama *redução de termos semelhantes* que, como é fácil de observar, pode ser feita pela seguinte regra :

Adicionam-se os coeficientes (em geral são números relativos) e repete-se a parte literal comum.

## ESTUDO DIRIGIDO — 2.ª SUBUNIDADE

1 — Estude durante 10 minutos a apresentação da segunda subunidade.

1.1 — Lembre-se de que o estudo é indispensável para que você aprenda de fato o que foi explicado.

1.2 — Lembre-se de que ninguém pode estudar por você.

1.3 — Lembre-se, finalmente, de que o estudo exige silêncio e concentração.

Trabalhe, pois, sem fazer barulho! Preste atenção no que faz!

2 — Responda ao questionário seguinte. Não consulte a apostilha.

2.1 — Que é monômio ?

2.2 — Que é coeficiente de um monômio ?

2.3 — Que são termos semelhantes ?

2.4 — Qual é a regra que devemos empregar para reduzir termos semelhantes ?

3 — Corrija suas respostas. Use sua apostilha.

4 — Resolva as seguintes questões :

4.1 — Quais são os coeficientes dos monômios abaixo ?

a)  $3a^2x$       c)  $-5xy^2$       e)  $-xy$

b)  $\frac{2}{3}x^2y^3$       d)  $-\frac{3}{5}xy^3$       f)  $\frac{xy}{2}$

4.2 — Quais são os graus dos monômios da questão anterior em relação à letra  $x$  ?

4.3 — Quais são os graus dos monômios da questão 4.1 em relação a todas as letras ?

4.4 — Reduza os termos semelhantes seguintes :

a)  $5a + 3a - 6a =$

b)  $7x - 9x + 3x =$

c)  $2ax - 5ax + 7ax =$

d)  $xy - xy + 5xy =$

e)  $2px - 6px + 3px =$

f)  $3vt - 5vt + vt =$

g)  $5gh - 6gh + 2gh =$

h)  $w^2t - 4w^2t + 5w^2t =$

5 — Corrija seus exercícios.

### APRESENTAÇÃO DA 3.ª SUBUNIDADE

#### OPERAÇÕES COM OS MONÔMIOS

##### 1 — Adição

Para adicionar vários monômios formamos com eles um polinômio e, em seguida, reduzimos os termos semelhantes.

1.º exemplo : Adicionar  $2ax$  com  $3ax$  e com  $-4ax$ .

Temos :

$$2ax + 3ax - 4ax = ax$$

( $2 + 3 - 4 = 1$  e o coeficiente 1 não se escreve).

2.º exemplo : Adicionar

$5xy^2$  com  $2x^2y$  com  $-3xy^2$  e com  $x^2y$ .

Temos :

$$5xy^2 + 2x^2y - 3xy^2 + x^2y.$$

O primeiro e o terceiro termos são semelhantes, logo :

$$5xy^2 - 3xy^2 = 2xy^2$$

O segundo e o quarto termos são semelhantes, logo :

$$2x^2y + x^2y = 3x^2y$$

A soma dos quatro monômios dados é pois :

$$2xy^2 + 3x^2y$$

## 2 — Subtração

Para subtrair dois monômios, trocamos o sinal do diminuidor e o adicionamos ao diminuendo.

$$1.^\circ \text{ ex. : } 5ax - (2ax) = 5ax - 2ax = 3ax$$

$$2.^\circ \text{ ex. : } 5ax - (-2ax) = 5ax + 2ax = 7ax$$

Resulta que para eliminarmos um parêntesis precedido do sinal  $-$ , devemos trocar os sinais de todos os termos nêle encerrados.

$$\text{Ex. : } 3xy - (5xy - 4xy) = 3xy - 5xy + 4xy = 2xy.$$

## 3 — Multiplicação

Seja multiplicar  $5x^2y$  por  $2x$ , isto é,  $5x^2y \cdot 2x$ .

$$\text{Temos imediatamente : } 5x^2y \cdot 2x = 5 \cdot x^2 \cdot y \cdot 2 \cdot x.$$

Lembrando que a ordem dos fatores não altera o produto (prop. comutativa), podemos escrever :

$$5x^2y \cdot 2x = 5 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x \cdot y.$$

Mas, em uma multiplicação de vários fatores podemos substituir alguns deles pelo seu produto efetuado (propriedade associativa), logo

$$5x^2y \cdot 2x = (5 \cdot 2) \cdot (x^2 \cdot x) \cdot y = 10x^3y$$

Conclusão :

O produto de vários monômios é um monômio cujo coeficiente é o produto dos coeficientes dos monômios dados e cuja parte literal é formada tomando para expoente de cada letra a soma dos expoentes com que ela figura nos fatores.

## 4 — Divisão

Seja efetuar  $\frac{15x^3y^4}{3xy^2}$ . Temos, logo :

$$\frac{15x^3y^4}{3xy^2} = \frac{15}{3} \cdot \frac{x^3}{x} \cdot \frac{y^4}{y^2} = 5x^2y^2$$

Conclusão :

O quociente de dois monômios é um monômio, cujo coeficiente é o quociente dos coeficientes do dividendo e do divisor, e cuja parte literal é formada tomando para expoente de cada letra a diferença dos expoentes com que ela figura no dividendo e no divisor.

Vejamos alguns exemplos :

1.º — Divida  $12x^2y^5$  por  $4x^2y^3$

$$\frac{12}{4} = 3 \quad \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \frac{y^5}{y^3} = y^{5-3} = y^2$$

Então vem :

$$\frac{12x^2y^5}{4x^2y^3} = 3 \cdot 1 \cdot y^2 = 3y^2$$

Conclusão :

As letras que figuram com o mesmo expoente no dividendo e no divisor não aparecem no quociente.

2.º — Divida  $20x^3y^2$  por  $4x^2$ .

$$\frac{20}{4} = 5 \quad \frac{x^3}{x^2} = x^{3-2} = x^1 = x \quad \frac{y^2}{y^0} = y^{2-0} = y^2$$

É interessante observar que, quando uma letra não figura no divisor, podemos considerar como se ela figurasse com expoente zero. Em nosso caso, por exemplo, temos :

$$4x^2 = 4x^2y^0.$$

De fato, basta lembrar que  $y^0 = 1$ , donde resulta

$$4x^2y^0 = 4x^2 \cdot 1 = 4x^2.$$

Portanto :

$$\frac{20x^3y^2}{4x^2} = 5xy^2$$

Conclusão :

As letras que existem no dividendo e não existem no divisor figuram com o seu expoente no quociente.

3.º — Dividir  $15x^4$  por  $5x^2y^3$

Temos  $\frac{15x^4}{5x^2y^3} = \frac{3x^2}{y^3}$  ou  $3x^2y^{-3}$ .

Conclusão :

Quando no divisor aparecem letras que não figuram no dividendo, o monômio obtido para quociente não pode ser inteiro.

### ESTUDO DIRIGIDO — 3.ª SUBUNIDADE

- 1 — Você dispõe de 5 minutos para recordar as regras de operação com monômios.

Não desanime diante do primeiro obstáculo. Seja perseverante !

- 2 — Resolva as seguintes questões. Lance mão da apostilha em caso de necessidade.

2.1 — Efetuar as seguintes adições :

$3ax$	$7a^2x$	$-8xy$	$-5xy^2$
$2ax$	$3a^2x$	$+6xy$	$-4xy^2$
$4gh$	$8uv$	$2hy$	$3Ry$
$3gh$	$uv$	$-3hy$	$-7Ry$
$-5gh$	$-6uv$	$-hy$	$6Ry$

2.2 — Efetue

a)  $5a^2x + 3a^2x - 7a^2x =$

b)  $3x^2y - 9x^2y + 5x^2y =$

c)  $2a^2x - 3a^2x + a^2x =$

$$d) 2v_0^2 + vt - v_0^2 =$$

$$e) a^2 + 4ab + b^2 - 2ab =$$

$$f) x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 =$$

$$g) -2y_1^2 - y_1y_2 + 2y_2^2 + 3y_1^2 - y_2^2 - y_1y_2 =$$

2.3 — Efetuar :

$$a) 8abx - (6abx) =$$

$$b) 5abx - (-3abx) =$$

$$c) 4uv - (-uv) =$$

$$d) 7gh - (-gh) =$$

$$e) vt - (-3vt) =$$

2.4 — Elimine os seguintes parêntesis e reduza os termos semelhantes das expressões resultantes.

$$a) 5ab - (8ab - 3ab) =$$

$$b) 7xy - (-2xy + 10xy) =$$

$$c) x^2y^3 - (-2x^2y^3 - 4x^2y^3) =$$

$$d) w^2r - (-3w^2r + 2w^2r) =$$

2.5 — Efetue :

$$a) 5ax \times 2a^2x =$$

$$b) (-3x^2y) \times 4xy^3 =$$

$$c) 5x^2y^3 \times (-6x^2y^3) =$$

$$d) (-4Rx) (-5Rx) =$$

$$e) (-2ax^2)^2 =$$

$$f) (-3a^2x^3y)^2 =$$

$$g) (-kx^2y)^2 =$$

$$h) (-pxy^2)^3 =$$

$$i) 8x^2y^3 \div 4xy =$$

$$j) (-12a^2xy^3) \div 4axy =$$

$$l) (-20ax^2y^3) \div (-5axz) =$$

$$m) (-80r^2p) \div (-20r^2) =$$

$$n) 30w^2r \div (-6wr) =$$

3 — Corrija seus exercícios.

## APRESENTAÇÃO DA 4.ª SUBUNIDADE

### AS EQUAÇÕES

#### 1 — Cálculo de um fator desconhecido num produto de dois números.

Seja completar a igualdade  $3 \times \dots = 234$ .

Todos vocês sabem que se deve dividir 234 (produto) por 3 (fator conhecido) para encontrar-se o fator desconhecido, o que dá 78.

Em lugar dos pontos, vamos chamar de  $x$  o fator desconhecido. Resulta

$$3x = 234 \quad (1)$$

Temos agora uma igualdade com uma letra cujo valor desejamos calcular.

É claro que devemos dividir 234 (produto) por 3 (fator conhecido) para encontrar o valor de  $x$  (fator desconhecido). Então :

$$x = \frac{234}{3} = 78$$

Esse é o único valor de  $x$  que convém à igualdade (1), isto é, substituindo  $x$  por 78, temos

$$3 \times 78 = 234 \quad \text{ou} \quad 234 = 234.$$

Substituindo  $x$  por outro valor teremos um absurdo.

Exemplo : vamos substituir  $x$  por 80.

$$3 \times 80 = 234 \quad \text{ou} \quad 240 = 234 \quad (\text{absurdo}).$$

A igualdade (1) é portanto *condicional*, isto é, só é verdadeira com a condição de ser  $x = 78$ .

#### 2 — Equações

Equação é uma igualdade condicional.

A letra que representa o elemento desconhecido da equação chama-se *incógnita*; os valores da incógnita, para os quais a equação se transforma em uma igualdade verdadeira, são as *raízes da equação*. Ex. : 78 é a raiz da equação  $3x = 234$ .

#### 3 — Equação do tipo $ax = b$

Nas equações desse tipo,  $b$  representa o produto,  $a$  representa o fator conhecido, e  $x$  representa a incógnita.

Temos que ter  $a \neq 0$ , pois do contrário seria  $b = 0$  e  $x$  poderia ser igual a qualquer número.

Esta equação tem uma só raiz, que se obtém dividindo o produto pelo fator conhecido, isto é,

$$x = \frac{b}{a}$$

Resolver uma equação é procurar as suas raízes.

#### 4 — Resolução de problemas

Comprei 3 quilos de manteiga por Cr\$ 234,00.

Qual é o preço do quilo dessa manteiga ?

Chamando de  $x$  o preço de um quilo da manteiga, temos :

$$3x = 234, \text{ logo } x = 78$$

Resposta : Cr\$ 78,00.

É claro que esse problema é muito simples e todos vocês poderiam resolvê-lo sem o auxílio das equações. No entanto, aprendendo a resolver problemas simples como esse, por meio das equações, vocês aprenderão a manejá-las com desembaraço e chegarão em breve a usá-las com vantagens para a resolução dos mais diversos e complicados problemas.

**ESTUDO DIRIGIDO — 4.ª SUBUNIDADE**

1 — Responda ao questionário abaixo :

- Tôda igualdade é uma equação ?
- Que é equação ?
- Que é incógnita de uma equação ?
- Que é raiz de uma equação ?
- Que é resolver uma equação ?
- Qual é a condição que devemos impor à equação  $ax = b$  para que possamos resolvê-la ? (\*)

1 — Resolva em seguida as equações abaixo :

- $2x = 10$
- $-3x = 6$
- $4x = -12$
- $-5x = -15$
- $1,1x = 1,21$
- $1,2x = 1,44$
- $-0,9x = 0,72$
- $2x = \frac{2}{3}$
- $2x = a$
- $3r = 6$
- $2uv = 6u$

(\*) NOTA — Se encontrar dificuldade em responder a qualquer uma dessas questões, apanhe a apostilha e estude a quarta subunidade. Volte depois ao questionário e complete-o.

2 — As expressões abaixo são fracionárias e, portanto, não têm valor numérico para certos valores de  $x$ . Quais são eles ?

a)  $\frac{2}{x-a}$       b)  $\frac{1}{2x-10}$       c)  $\frac{1}{3x-a}$

3 — Resolver os seguintes problemas.

- A área de um retângulo mede  $11,2 \text{ cm}^2$  e sua base mede  $8 \text{ cm}$ . Quanto mede sua altura ?

DESENVOLVIMENTO

Cálculos

Resposta :

- O perímetro de um quadrado mede  $14,4 \text{ cm}$ . Quanto mede a área desse quadrado ?

DESENVOLVIMENTO

Cálculos

Resposta :

- O perímetro de um retângulo mede  $48 \text{ cm}$ . A base é o triplo da altura. Calcule a área do retângulo.

DESENVOLVIMENTO

Cálculos

Resposta :

## Organização da Unidade

Introdução ao estudo da Álgebra

- |                     |  |  |   |  |   |  |
|---------------------|--|--|---|--|---|--|
| Expressão algébrica | {  | <ol style="list-style-type: none"> <li>1 — Uso de letras em Matemática : permite generalizar as propriedades dos números e as soluções dos problemas.</li> <li>2 — Expressão algébrica : conjunto de números e letras ligados por um número determinado de operações aritméticas.</li> <li>3 — Classificações               <table style="display: inline-table; vertical-align: middle; margin-left: 10px;"> <tr> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">{</td> <td> <ol style="list-style-type: none"> <li>I — Racional e irracional</li> <li>II — Inteira e fracionária</li> <li>III — Monômio e polinômio</li> </ol> </td> </tr> </table> </li> <li>4 — Valor numérico               <table style="display: inline-table; vertical-align: middle; margin-left: 10px;"> <tr> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">{</td> <td> <ol style="list-style-type: none"> <li>1 — Substituem-se as letras por valores dados e efetuam-se os cálculos indicados.</li> <li>2 — Uma expressão algébrica não admite valor numérico para os valores dados, desde que eles anulem denominadores.</li> </ol> </td> </tr> </table> </li> </ol> | { | <ol style="list-style-type: none"> <li>I — Racional e irracional</li> <li>II — Inteira e fracionária</li> <li>III — Monômio e polinômio</li> </ol>   | { | <ol style="list-style-type: none"> <li>1 — Substituem-se as letras por valores dados e efetuam-se os cálculos indicados.</li> <li>2 — Uma expressão algébrica não admite valor numérico para os valores dados, desde que eles anulem denominadores.</li> </ol> |
| {                   | <ol style="list-style-type: none"> <li>I — Racional e irracional</li> <li>II — Inteira e fracionária</li> <li>III — Monômio e polinômio</li> </ol>   |  |   |  |   |  |
| {                   | <ol style="list-style-type: none"> <li>1 — Substituem-se as letras por valores dados e efetuam-se os cálculos indicados.</li> <li>2 — Uma expressão algébrica não admite valor numérico para os valores dados, desde que eles anulem denominadores.</li> </ol>   |  |   |  |   |  |
| Monômio ou termo    | {  | <ol style="list-style-type: none"> <li>1 — Expressão algébrica em que os números e letras estão ligados apenas por multiplicação.</li> <li>2 — Coeficiente — fator numérico com o sinal.</li> <li>3 — Parte literal : conjunto das letras com os expoentes.</li> <li>4 — Grau : soma dos expoentes das letras consideradas.</li> <li>5 — Monômios semelhantes : têm a mesma parte literal.</li> <li>6 — Redução de termos semelhantes : adicionam-se os coeficientes e repete-se a parte literal comum.</li> <li>7 — Operações               <table style="display: inline-table; vertical-align: middle; margin-left: 10px;"> <tr> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">{</td> <td> <ol style="list-style-type: none"> <li>I — Adição : reduzem-se os termos semelhantes.</li> <li>II — Subtração : troca-se o sinal do segundo termo e adiciona-se com o primeiro.</li> <li>III — Multiplicação : Multiplicam-se (dividem-se) os coeficientes e escreve-se cada letra com a soma (diferença) dos expoentes com que ela figura nos fatores (no dividendo e no divisor).</li> </ol> </td> </tr> </table> </li> </ol>                          | { | <ol style="list-style-type: none"> <li>I — Adição : reduzem-se os termos semelhantes.</li> <li>II — Subtração : troca-se o sinal do segundo termo e adiciona-se com o primeiro.</li> <li>III — Multiplicação : Multiplicam-se (dividem-se) os coeficientes e escreve-se cada letra com a soma (diferença) dos expoentes com que ela figura nos fatores (no dividendo e no divisor).</li> </ol> |   |  |
| {                   | <ol style="list-style-type: none"> <li>I — Adição : reduzem-se os termos semelhantes.</li> <li>II — Subtração : troca-se o sinal do segundo termo e adiciona-se com o primeiro.</li> <li>III — Multiplicação : Multiplicam-se (dividem-se) os coeficientes e escreve-se cada letra com a soma (diferença) dos expoentes com que ela figura nos fatores (no dividendo e no divisor).</li> </ol> |  |   |  |   |  |

Introdução ao estudo da Álgebra

- |         |   |  |
|---------|---|--|
| Equação | { | <ol style="list-style-type: none"> <li>1 — É uma igualdade condicional, isto é, que só se <i>verifica</i> para certos valores de uma letra.</li> <li>2 — Essa letra é a incógnita.</li> <li>3 — Os valores da incógnita que <i>verificam</i> a equação, chamam-se raízes.</li> <li>4 — Resolver uma equação é procurar suas raízes.</li> <li>5 — Dada a equação <math>ax=b</math>, onde <math>a \neq 0</math>, tem-se <math>x = \frac{b}{a}</math></li> <li>6 — As equações constituem recursos de ordem geral para a resolução de problemas.</li> </ol> |
|---------|---|--|

**TESTES DE VERIFICAÇÃO**

1 — Abaixo estão representados por letras algumas propriedades das operações com números inteiros. Coloque diante de cada uma o enunciado em linguagem comum.

- PROPRIEDADE
- I)  $a + 0 = 0$
  - II)  $a + 0 = a$

ENUNCIADO

2 — Use letras para exprimir na linguagem algébrica os seguintes enunciados.

- LINGUAGEM COMUM
- I) A soma de dois números inteiros menos a sua diferença é igual ao dobro do número menor.
  - II) O produto da soma de dois números pela sua diferença é igual à diferença entre os quadrados dos dois números.

LINGUAGEM ALGÉBRICA

3 — Calcule o valor numérico de

$$e_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad \text{para } e_0 = 3;$$

$$v_0 = 2; \quad a = -1 \quad \text{e} \quad t = 0,5.$$

4 — Calcule o valor numérico de

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{para } a = 1; \quad b = -11 \quad \text{e} \quad c = 28.$$

5 — Efetue :

a)  $7ax^2 - 9ax^2 + 3ax^2 =$

b)  $2p^m y^m - [(4x^p y^m + x^p y^m) - 3x^p y^m] =$

6 — Efetue :

a)  $5x^2 y \times 2x^3 y^2 =$

b)  $3x^p y \times 4ax =$

7 — Efetue :

a)  $15a^2 x^3 \div 5ax =$

b)  $(-18a^3 x^3) \div 6a^3 x^2 =$

8 — Complete :

a) O coeficiente do monômio  $-5a^3x$  é .....

b) O monômio  $8ax^3y$  em relação a todas as letras é do grau .....

c) Equação é .....

9 — Resolva as equações abaixo.

a)  $-5,2x = 4,68$

Cálculos

b)  $0,25 = -6,25$

10 — Resolva o seguinte problema :

A soma de dois números é 102 e um deles é a quinta parte do outro. Quais são os números?

DESENVOLVIMENTO

Cálculos

Resposta :

## OS BÁRBAROS E O IMPÉRIO ROMANO



.PROF. DANIEL VALLE RIBEIRO

COLÉGIO NOVA FRIBURGO

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

CADEIRA: HISTÓRIA GERAL

CURSO: GINASIAL — 3.ª SÉRIE

1954

PROF. DANIEL VALLE RIBEIRO

#### UNIDADE IV — OS BÁRBAROS E O IMPÉRIO ROMANO

##### Objetivos :

I — Desenvolver nos alunos as seguintes *compreensões* básicas :

- a) de que os bárbaros não eram desprovidos de cultura;
- b) de que do contato desse tipo de cultura com a romana originou-se uma nova civilização, onde predominou a mais adiantada;
- c) de que as nações européias surgiram da fusão dos povos bárbaros com as populações do Império Romano;
- d) de que houve recomposição do Império Romano do Ocidente sob Carlos Magno, cuja personalidade excepcional dedicou especial atenção aos aspectos administrativos e educacionais.

II — Procurar incutir nos educandos *atitudes* favoráveis, relacionadas com os seguintes problemas :

- a) aceitação das diferenças culturais entre os diversos grupos humanos e respeito a essas diferenças;
- b) importância do contato de culturas, que as enriquece pela troca recíproca de valores;
- c) influência do Cristianismo na humanização dos costumes bárbaros.

III — Continuar a desenvolver bons *hábitos de estudo* com relação à História, sobretudo quanto a confronto de textos e organização de sinopses.

IV — Desenvolver a *habilidade* de traçar e manusear mapas históricos, referentes à época em estudo.

V — **Subunidades :**

- 1. OS POVOS BÁRBAROS — AS GRANDES INVASÕES
- 2. OS FRANCOS — CARLOS MAGNO

**TESTE DE SONDA GEM**

1. Por que os romanos chamavam bárbaros os povos que habitavam além de suas fronteiras ?  
Resp. ....
2. Que sabe dos costumes dos povos bárbaros ?  
Resp. ....
3. Por que os bárbaros invadiram o Império Romano ?  
Resp. ....
4. Antes dessa invasão, os romanos já haviam tido algum contato com os bárbaros ? Sim ou Não ? Justifique :  
.....
5. As infiltrações bárbaras deram-se no Império Romano do  
.....
6. Conhece alguns nomes de povos bárbaros ?  
Resp. ....
7. Lembra-se de alguns nomes de chefes bárbaros ?  
Resp. ....
8. Quais as nações européias provenientes da fixação dos bárbaros no Império Romano ?  
Resp. ....
9. Acha que foi valiosa para o desenvolvimento da nossa civilização a invasão do Império Romano pelos bárbaros ? Sim ou Não ? Fundamente seu ponto de vista.
10. Justifique seu julgamento sobre Carlos Magno, caso conheça alguma coisa a seu respeito.

## APRESENTAÇÃO DA UNIDADE IV

Para melhor compreensão das origens dos países europeus, necessário se torna que conheçamos as modificações sofridas pelo Império Romano nos IV e V séculos, épocas em que se viu abalado pelos constantes deslocamentos de povos no seu interior. A Inglaterra, a França, a Alemanha, etc., que hoje despontam como grandes nações do Velho Mundo, originaram-se desses povos que tomaram o Império Romano e aí se fixaram fundando reinos.

O estudo desta unidade fundamenta a compreensão do grande mosaico étnico de que se constitui a população européia.

Temos ainda a ressaltar a influência cultural do romano sobre o bárbaro invasor. Este, embora vencedor, curvou-se ante o vencido, assimilando os hábitos da civilização romana, superior à sua.

Bárbaros era a denominação que os romanos davam aos que habitavam além das suas fronteiras e que não falavam o Latim. Compreendiam diversos povos, que podem ser divididos em três grandes grupos: os *germanos*, que habitavam além dos rios Reno e Danúbio, na região da Germânia; os *eslavos*, que se localizavam entre o mar Báltico e os montes Urais; os *tártaros*, vindos do centro da Ásia.

Os *germanos*, os mais importantes, eram politeístas, viviam da caça e da pesca, do pastoreio e da agricultura, e tinham como principal ocupação a guerra. Por isso cabiam às mulheres tôdas as tarefas, pois os homens deviam estar sempre preparados para a luta. Quase todos os povos germânicos se converteram ao Cristianismo, depois de suas infiltrações no Impé-

rio Romano. Dêles resultaram diversas nações européias, como a Alemanha, a França, a Inglaterra e outras.

Os *eslavos*, a princípio guerreiros, entregaram-se depois ao pastoreio. Também eram politeístas e praticavam a agricultura. Compreendiam vários povos, dentre os quais os russos, os poloneses, os sérvios, os bósnios, etc., que deram origem a outras nações européias.

Os *tártaros*, de raça amarela, vestiam-se de peles e se alimentavam de carne crua. Guerreiros ferozes e hábeis cavaleiros, eram muito temidos. Os hunos, os ávaros, os búlgaros e outros faziam parte desse grupo. Os hunos eram os que mais pavor infundiam, pois excediam a todos em ferocidade.

Várias causas motivaram as penetrações dos povos bárbaros na Europa. A necessidade de terras férteis, onde pudessem trabalhar, a fuga à pressão exercida pelos hunos, a decadência do Império Romano, que contratava os bárbaros para defender suas fronteiras, foram as principais.

A penetração no Império Romano se fez de duas maneiras: pacificamente, quando os bárbaros eram contratados pelos romanos para defender suas fronteiras, trabalhar nos campos ou mesmo na administração; violentamente, quando os bárbaros se lançaram sobre o Império, tomando-o à custa de luta.

Desde a época de Mário os bárbaros ameaçavam o Império. Todavia só mais tarde iniciaram a penetração na Europa, localizando-se em diversos pontos do território romano, onde formaram reinos depois de diversas migrações. Assim é que na Península Ibérica estabeleceram-se os *visigodos* e, mais tarde, os *suevos* e *alanos*; na Gália fixaram-se os *borgúndios* e os *francos*; e no Norte da África (em Cartago) sediaram-se os *vândalos*. Os terríveis *hunos*, comandados por Atila, devastaram o Império. Derrotado na Gália, Atila retirou-se para a Panônia (atual Hungria), de onde marchou sobre a Itália. Posteriormente outros povos invadiram o enfraquecido Império Romano. Na

Grã-Bretanha situaram-se os *anglos* e os *saxões*; os *lombardos*, depois de expulsarem os *ostrogodos* da Itália, localizaram-se na região, formando um reino; finalmente, após vários assaltos, os *normandos* fundaram reinos no Sul da Itália e ao Norte da França, e daí marcharam para a conquista da Inglaterra.

De todos esses povos, estudaremos particularmente os francos, que unificaram a Gália sob seu domínio na época de Clóvis, o criador da monarquia franca. Na dinastia dos carolíngios desponta Carlos Magno como a maior figura dos francos e o grande soberano da Idade Média.

Notável contribuição emprestou ao bárbaro invasor a civilização romana, transformando-lhes os costumes e as instituições. Mais decisiva ainda foi a influência moral exercida sobre eles pelo Cristianismo, convertendo-os e impedindo por diversas vezes a destruição do Império Romano.

Para melhor compreensão e assimilação do estudo da presente unidade, os assuntos serão tratados em dois itens :

1. OS POVOS BÁRBAROS — AS GRANDES INVASÕES.
2. OS FRANCOS — CARLOS MAGNO.

### TESTE DE CONTRÔLE DA APRESENTAÇÃO

1. Os bárbaros compreendiam três grandes grupos : os ..... , os ..... e os .....
2. Os ..... constituíam o principal grupo bárbaro e habitavam a região .....
3. Os francos localizavam-se .....
4. O maior soberano dos francos foi .....
5. Por que os bárbaros invadiram o Império Romano ?  
Resp. ....
6. Em que parte da Europa os visigodos fundaram um reino ?  
Resp. ....
7. Que faria você para saber a localização dos diferentes povos bárbaros dentro do Império Romano ?
8. Grife os nomes dos povos pertencentes ao grupo eslavo :  
francos          visigodos          russos          alamanos  
vândalos          bônios          ostrogodos          borgúndios  
sérvios          hérulos          croatas          saxões
9. Diga por que julga importante o estudo desta unidade.
10. Por que embora derrotado, o romano influiu nos povos bárbaros ?
11. O povo bárbaro mais agressivo era o ..... , cujo principal chefe foi .....
12. De que forma os bárbaros penetraram no Império Romano ?

## APRESENTAÇÃO DA 1.ª SUBUNIDADE

### OS BÁRBAROS — AS GRANDES INVASÕES

**Os Povos Bárbaros** — Os romanos davam o nome de bárbaros aos habitantes das regiões situadas além de suas fronteiras. Esses povos podem ser divididos em três grupos: os germanos, os eslavos e os tártaros. Os primeiros eram os mais importantes e habitavam a Germânia, região situada além dos rios Reno e Danúbio. Os GERMANOS tinham por principal ocupação a guerra e praticavam a pesca, a caça, o pastoreio e a agricultura. Viviam em aldeias e cercavam com sebes suas habitações feitas de madeira. As mulheres faziam todos os trabalhos, pois os homens só se deveriam ocupar das armas. Eram politeístas e acreditavam que os guerreiros mortos em combate seriam levados ao paraíso (o Valhala) pelas Valquírias, através da ponte do arco-íris. Tomavam suas decisões em assembleias, ao ar livre, e escolhiam o chefe dentre os guerreiros mais valentes. Os germanos compreendiam diversos povos, como os *francos*, os *suevos*, os *alamanos*, os *visigodos* e os *ostrogodos*, os *anglos*, os *saxões*, os *vândalos* e outros.

Os **ESLAVOS** localizavam-se entre o mar Báltico e os Montes Urais, e eram também guerreiros. Praticavam o pastoreio e o politeísmo. Faziam parte desse grupo os *russos*, os *poloneses*, os *sérvios*, os *bósnios*, etc.

Os **TÁRTAROS**, originários do centro da Ásia, notabilizaram-se como guerreiros. Alimentavam-se de carne crua e vestiam-se de peles de animais. Também os tártaros constituíam-se de diversos povos: os *hunos* — os mais temidos —, os *búlgaros*, os *ávares* e outros. Sua religião, como a dos demais grupos, era politeísta.

**As Grandes Invasões** — Não foi somente pela violência que os bárbaros penetraram no Império Romano. Muitas vezes para lá se dirigiram contratados pelos imperadores como soldados ou como agricultores, e alguns chegaram a desempenhar importantes cargos na administração. Dentre as principais causas das invasões, citam-se a necessidade de terras mais férteis, a fuga aos terríveis hunos e a atração que o bárbaro sentia pelo Império Romano.

**Os Visigodos** — No final do IV século os visigodos tiveram licença do Imperador VALENTE para se estabelecerem na região das atuais Bulgária e Romênia, onde permaneceram por algum tempo pacificamente. Mais tarde, porém, sob o comando de ALARICO, atacaram a Macedônia e a Grécia e devastaram a Itália, saqueando Roma. ATAULFO, sucessor de Alarico, fez aliança com o imperador romano HONÓRIO, após o que avançou sobre a Península Ibérica, onde fundou um reino, mais tarde destruído pelos árabes.

**Os Suevos, Vândalos e Alanos** — Os suevos, chefiados por RADAGÁSIO, lançaram-se sobre a Itália, mas foram derrotados por ESTILICÃO. O chefe dos suevos tombou na luta, e estes se uniram aos *vândalos*, *alanos* e *borgúndios*, e marcharam contra a Gália, onde os últimos formaram um reino. Os *suevos*, os *alanos* e os *vândalos* localizaram-se na Península Ibérica, de onde partiram para o Norte da África, destruindo Cartago e criando um reino. Depois os vândalos saquearam Roma, sob o comando de GENSERICO.



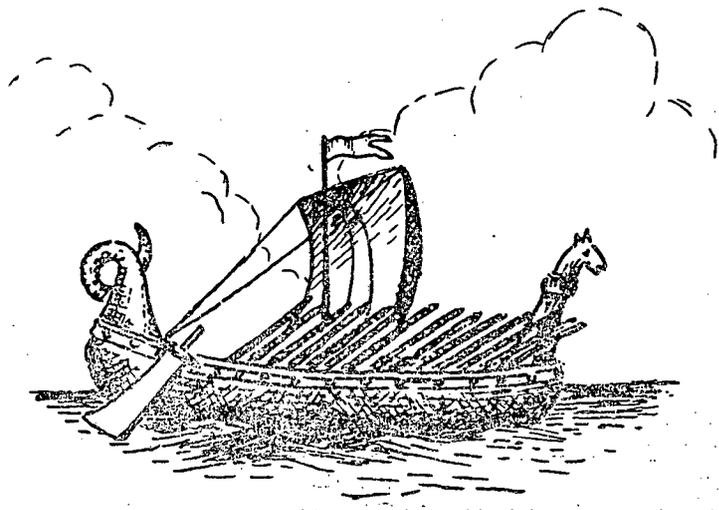
Attila

**Os Hunos** — Vindos da região central da Ásia, chefiados por ÁTILA, o "Flagelo de Deus", os hunos, depois de conquistarem os territórios dos *ostrogodos*, invadiram e devastaram a Gália. Os *visigodos* e os *francos* se uniram ao exército romano de Écio e conseguiram vencer Attila, que se

retirou para a Panônia. Pouco depois Atila atacou a Itália, destruindo muitas cidades. O Papa S. LEÃO conseguiu salvar Roma, e o chefe dos hunos voltou ao seu reino. Com a morte de Atila ficou o Império Romano livre dos terríveis hunos.

**Outras Invasões** — O Império Romano, já enfraquecido e dominado por diversos invasores germânicos, sofreu novo ataque e caiu vencido ante os *hérulos*, cujo chefe — ODOACRO — destronou o último imperador. No entanto, foi Odoacro morto por TEODORICO, chefe dos *ostrogodos*, que submeteu a Itália ao seu domínio e estabeleceu sua capital em Ravena.

Mais tarde os *lombardos* dominaram a Itália, até que foram vencidos por CARLOS MAGNO.



Barco de guerra normando

Na Grã-Bretanha estabeleceram-se os *anglos* e os *saxões*, depois de derrotarem os *pictos* e os *escotos*, assim como os *bretões*.

Os *normandos*, notáveis na arte de navegar, após invadirem e assaltarem diversas regiões da Europa, fundaram reinos no Sul da Itália e no Norte da França e em seguida partiram para a conquista da Inglaterra.

## ESTUDO DIRIGIDO — 1.ª SUBUNIDADE

Trabalhe em silêncio. Não perca tempo.

Se encontrar dificuldades repita a leitura.

Use o dicionário e registre o sinônimo aplicável ao caso.

1. Leia o primeiro item da Apresentação da 1.ª Subunidade. Consulte também o livro de História Geral de A. Borges Hermida, p. 166. Faça em seguida um quadro sinótico dos *grupos bárbaros*.
2. Consulte agora o segundo item da apostilha (As Grandes Invasões). Recorra também ao livro de História Geral, ps. 169-173. Mostre ainda num esquema (quadro sinótico) como se deu a *infiltração dos povos bárbaros no Império Romano*.
3. Localize no mapa-mudo que se encontra na página seguinte :

- a) o *habitat* primitivo dos germanos, eslavos e tártaros;
- b) os principais reinos bárbaros.



Mapa-Mundo da Europa

## APRESENTAÇÃO DA 2.ª SUBUNIDADE

### OS FRANCOS — CARLOS MAGNO.

**Os Merovíngios** — Os francos estabeleceram-se no Império durante as infiltrações dos bárbaros. Não formavam a princípio um povo, pois estavam divididos em diversas tribos: *sálhos*, *ripuários*, *sicambros*, etc. Na Gália habitavam ainda os *romanos*, os *borgúndios*, os *visigodos* e os *alamanos*. **MEROVEU**, um dos primeiros chefes dos francos, destacou-se na luta contra Atila e deu seu nome à primeira dinastia franca. Seu neto, **CLÓVIS**, foi quem unificou os francos e estabeleceu o domínio do seu povo na região.

Embora pagão, Clóvis era casado com uma princesa católica, **CLOTILDE**, sobrinha do rei dos *borgúndios*. Depois de vencer os *rômanos*, Clóvis entrou em luta contra os *alamanos*; vendo-se perdido, implorou o auxílio do Deus de sua esposa, prometendo converter-se ao Cristianismo, caso vencesse os inimigos. Vitorioso, cumpriu a promessa, sendo batizado por **S. REMÍGIO**, bispo de Reims.

Tendo vencido os *borgúndios* e os *visigodos*, Clóvis garantiu a supremacia dos francos na Gália. Com sua morte, o reino foi dividido entre seus filhos, que logo entraram em luta.

Depois de Clóvis, apenas se distinguiu **DAGOBERTO**, grande administrador. Seus sucessores, por serem fracos e sem nenhuma autoridade, foram chamados “reis indolentes”.

O govêrno era realmente exercido pelos “prefeitos do palácio”, que se tornaram senhores do poder. Um deles, **CARLOS MARTEL**, venceu os árabes em Poitiers, salvando a Europa de séria ameaça.

Os Carolíngios — Foi PEPINO, o BREVE, filho de Carlos Martel, quem pôs fim à dinastia *merovíngia*, iniciando a dos *carolíngios*. Só assumiu o título de rei após a aprovação do papa S. Zacarias à consulta sôbre “qual merecia o título de rei, quem só o era de nome ou quem dispunha de toda a auto-



Império de Carlos Magno

ridade?” Pepino então destronou CHILDERICO III e o encerrou em um convento. O fato de maior relêvo do seu govêrno foi a doação feita ao papa dos territórios tomados aos *lombardos* e que constituíram o Patrimônio de São Pedro. Daí a ori-

gem do poder temporal da Igreja. Morrendo Pepino, o reino dos francos coube a seus filhos CARLOS (Magno) e CARLO-MANO. Com a morte dêste ficou Carlos Magno como único soberano.

**Império de Carlos Magno** — Carlos Magno foi o maior guerreiro e conquistador da Idade Média e também o mais destacado soberano dessa época. “Sua surpreendente superioridade foi devida, não à enorme proponderância de uma faculdade especial, como em muitos grandes homens, mas ao harmonioso equilíbrio de tôdas, reunidas em grau supremo na mesma pessoa”.

Em seu longo reinado Carlos Magno empreendeu mais de cinquenta campanhas, conseguindo submeter os povos vizinhos. Os *lombardos*, que ameaçavam o Sumo Pontífice, caíram vencidos. Carlos Magno cingiu a “coroa de ferro” dos reis lombardos e confirmou a doação dos territórios feita por seu pai à Santa Sé. Empreendeu inúmeras expedições contra os *saxões*. Sômente depois da conversão de VIDUQUIND pôde Carlos Magno dominar a Saxônia. Os *ávaros*, que haviam ocupado a Panônia, foram subjugados após oito anos de dura campanha, surgindo daí a Marca de Este, que deu origem à Austria.

Também contra os árabes, estabelecidos na Espanha, lutou Carlos Magno. Todavia não foi feliz o grande soberano, pois suas tropas, chefiadas pelo seu sobrinho ROLANDO, viram-se destruídas quando se retiravam.

No momento em que rezava na basílica de São Pedro, em Roma, na noite de Natal do ano 800, foi coroado imperador pelo Papa LEÃO III, sob a aclamação do povo. Estava assim restabelecida a unidade imperial do ocidente.

Notável foi a obra administrativa de Carlos Magno. Cercando-se de homens de valor, como ALCUÍNO, deu especial proteção ao ensino, fundando numerosas escolas. Dividiu o império em províncias, cujos governadores eram fiscalizados por emissários da confiança do imperador.

Embora pouco instruído, Carlos Magno aparece como o grande animador do movimento intelectual de sua época.

**Os Últimos Carolíngios** — Os sucessores de Carlos Magno não mantiveram a unidade do império. Luís, o Piedoso, seu filho e sucessor, dividiu-o pelos três filhos, que lutaram entre si. O tratado de Verdun estabeleceu a nova divisão, início do desmembramento do império.

Várias causas provocaram essa fragmentação: a grande extensão do território, as dificuldades de comunicação, as diversidades existentes entre os seus componentes e a incapacidade dos sucessores de Carlos Magno. Finalmente, os nobres elegeram HUGO CAPETO, que iniciou a dinastia dos capetíngios.

## ESTUDO DIRIGIDO — 2.ª SUBUNIDADE

Não deixe de ilustrar o caderno nobre. (\*)

Procure vencer as dificuldades sozinho.

Não se esqueça de recorrer ao dicionário.

1. Consulte a primeira parte da Apresentação da 2.ª Subunidade.  
Leia também o livro adotado, p. 170.  
Esquematize em seguida, salientando apenas os fatos essenciais.  
Partindo do esquema (quadro sinótico) que você organizou, faça uma redação mostrando como se deu a *unificação dos francos*.
2. Leia agora o segundo item.  
Consulte também o livro de Borges Hermida, ps. 177 a 180.  
Mostre numa redação como surgiu a *dinastia carolíngia* e como se originou o *poder temporal da Igreja*.
3. Complete a leitura da subunidade.  
Esquematize o assunto, salientando a *unidade imperial do Ocidente sob Carlos Magno*.
4. Estude o mapa do Império de Carlos Magno. Passe-o em seguida para o caderno nobre.

---

(\*) NOTA — Em algumas disciplinas, os alunos organizam um caderno especial — o caderno nobre — que contém os assuntos essenciais e deve ser elaborado com ordem, correção e limpeza, podendo ser ilustrado com desenhos, gráficos, etc.

## ORGANIZAÇÃO DA UNIDADE IV

### I — OS BARBAROS

O conceito romano de bárbaro: *estrangeiro*.

Grupos {  
GERMANOS: *francos, visigodos, saxões, vândalos*, etc.  
ESLAVOS: *russos, poloneses, sérvios, bósnios*, etc.  
TÁRTAROS: *hunos, búlgaros, ávaros*, etc.

Causas das penetrações {  
Necessidade de terras férteis  
Pressão dos hunos sobre a Germânia  
Ambição pelo Império Romano

Infiltrações {  
Pacíficas: Nos campos, no exército e na administração  
Violentas: As grandes invasões

Consequências das Invasões {  
Início da formação dos países europeus  
Deslocamento das populações na Europa  
Influência recíproca das culturas romana e bárbara, com predomínio da primeira  
Papel decisivo do Cristianismo na humanização dos bárbaros

### II — OS FRANCOS

Situação primitiva {  
Divididos em tribos (sálios, ripuários, etc.)  
Tentativa de MEROVEU para uni-los  
Luta contra ATILA (chefe dos *hunos*)

Dinastia dos Merovíngios {  
Unificação dos francos e criação da monarquia por CLÓVIS  
Governo eficiente de DAGOBERTO  
"Reis indolentes" e influência dos *prefeitos de palácio*  
Papel de CARLOS MARTEL na luta contra os *árabes*

Dinastia dos Carolíngios {  
Ascensão de PEPINO, o Breve, após consulta ao Papa S. ZACARIAS; prisão do último merovíngio  
Origem do poder temporal da Igreja: terras doadas por PEPINO, o Breve, antes de subir ao poder  
Apogeu dos Carolíngios: CARLOS MAGNO

Atuação de CARLOS MAGNO {  
Reconstituição da unidade imperial do Ocidente  
Notável administração: proteção às letras, artes, etc.  
Desmembramento do império após sua morte

**VERIFICAÇÃO DA UNIDADE IV**

Aluno : ..... Série : .....

**I — Responda :**

a) Por que os bárbaros não tomaram o Império Romano do Oriente ?

Resp. ....  
.....  
.....

b) Como foi feita a unificação dos francos ?

Resp. ....  
.....  
.....

c) De que maneira foi reconstituída a unidade imperial do Ocidente ?

Resp. ....  
.....

**II — Complete as frases :**

a) Dentre os eslavos citam-se ..... e .....

b) A dinastia dos carolíngios iniciou-se quando ..... destronou .....

c) A principal ocupação dos povos bárbaros era ....., destacando-se ..... como os mais violentos.

d) Na luta que manteve contra ....., na Espanha, Carlos Magno não foi feliz.

**III — Sublinhe a resposta certa :**

a) Conselheiro de Carlos Magno :

Ovídio

Alcuíno

Pepino Breve

b) Conseqüências das invasões dos bárbaros :

Deslocamento dos povos europeus

Criação do Direito Romano

Divisão do Império Romano

c) Invadiram a Inglaterra :

Vândalos

Normandos

Suevos

d) Causa da infiltração bárbara na Europa :

Influência romana sobre os bárbaros

Pressão dos hunos

Cristianização dos bárbaros

e) Tribo franca :

sálios

bósnios

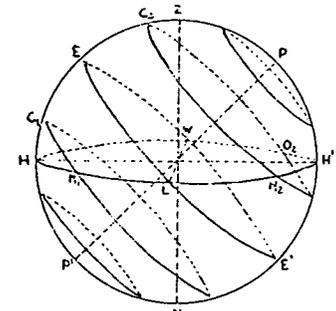
citas

**IV — Localize no mapa-mudo da outra página os reinos dos seguintes povos bárbaros : francos, visigodos, lombardos, vândalos, hunos e suevos.**



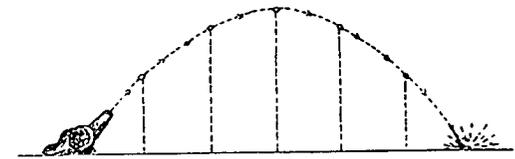
Mapa-Mundo da Europa

NOTA — As ilustrações são da autoria dos alunos da III e IV séries. A capa foi idealizada e realizada pelo aluno Nelson de Araújo Lima.

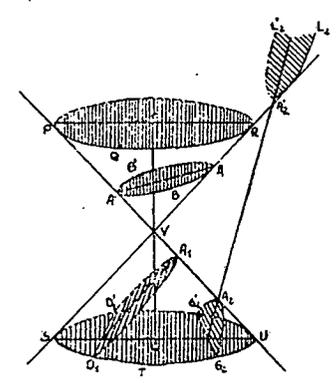
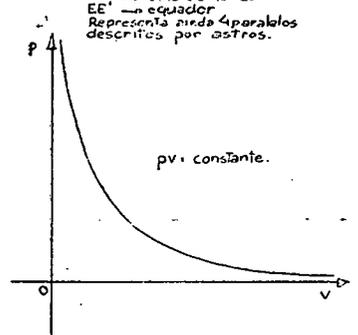


ZN → vertical do lugar  
 Hh' → horizonte (Hiz meridiana)  
 pp' → eixo do Mundo  
 EE' → equador  
 Representa ainda 4 paralelos descriptos por astros.

TEMPOS (seg.)	1	2	3	4	5	6
ALTURAS (m.)	25	40	45	40	25	0



DISTÂNCIAS (m) 20 40 60 80 100 200



Unidade VIII : Estudo das Cônicas.

Subunidades :

- 1.ª) A elipse
- 2.ª) A hipérbole
- 3.ª) A parábola

PROFESSOR AMAURY PEREIRA MUNIZ

## ESTUDO DAS CÔNICAS

### Objetivos :

- 1 — Desenvolver nos alunos as *compreensões* básicas relativas:
  - 1.1 — às definições da elipse, da hipérbole e da parábola como lugares geométricos;
  - 1.2 — ao traçado dessas curvas;
  - 1.3 — às suas propriedades elementares;
  - 1.4 — ao traçado de tangentes e normais;
  - 1.5 — à definição geral das cônicas;
  - 1.6 — ao desenvolvimento histórico e às aplicações do estudo das cônicas.
- 2 — Levar os educandos ao domínio das seguintes *habilidades específicas* :
  - 2.1 — reconhecer as propriedades da curva obtida seccionando-se um cone de revolução por um plano;
  - 2.2 — reconhecer os lugares geométricos e saber aproveitar a propriedade característica dos seus pontos;
  - 2.3 — justificar matematicamente as construções aprendidas na cadeira de Desenho sobre a elipse, a hipérbole e a parábola.
- 3 — Desenvolver nos alunos *atitudes de apreciação* para com o poder da Matemática.
- 4 — Continuar a desenvolver nos alunos os *hábitos* de raciocínio e de precisão.
- 5 — Fazer com que os alunos tenham *interêsse* pelas aplicações da Matemática ao estudo dos fenômenos naturais.

**TESTES DE SONDAGEM**

**1.ª questão**

Ponha um F ou um V diante de cada afirmação seguinte, conforme seja ela *falsa* ou *verdadeira*, respectivamente :

- I — Dois teoremas são recíprocos quando um deles tem por hipótese a tese do outro e por tese a hipótese do outro.
- II — Dois pontos são simétricos em relação a um eixo quando são equidistantes desse eixo.
- III — A circunferência tem uma infinidade de eixos de simetria.
- IV — A elipse tem uma infinidade de eixos de simetria.
- V — A parábola só tem dois eixos de simetria.

**2.ª questão**

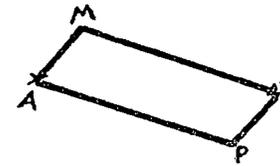
Complete as seguintes frases :

- I — Seccionando-se um cone de revolução por um plano perpendicular ao seu eixo, obtém-se .....
- II — Os números de vértices da elipse, da hipérbole e da parábola são respectivamente ....., ..... e .....
- III — Lugar geométrico é um conjunto de pontos .....

**3.ª questão**

Que é elipse ?

**4.ª questão**



Os pontos A e B são fixos e  $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{PA} + \overline{PB}$ . Os pontos M e P estão sobre uma mesma curva que é a .....

**5.ª questão**

Se fôsse  $\overline{MB} - \overline{MA} = \overline{PA} - \overline{PB}$ , a curva sobre a qual estariam os pontos seria uma .....

**6.ª questão**



Trace uma elipse, dados os seus focos (F e F') e um dos seus vértices (A).

**7.ª questão**



O ponto P da figura ao lado está sobre uma elipse cujos focos são F e F'. Trace a tangente e a normal à elipse no ponto considerado.

**8.ª questão**

Obtenha mais três pontos da elipse sobre a qual está o ponto P. Use a figura traçada na questão anterior.

## APRESENTAÇÃO DA UNIDADE

### 1 — O Problema de Delfos

Conta-se que outrora uma epidemia de febre eruptiva grassou em Atenas causando apreensões aos seus habitantes e levando-os a consultarem o oráculo do templo de Delfos, a fim de tentarem amainar o mal.

Souberam então que seria necessário duplicar o altar de Apolo, cuja forma era de um cubo.

As pessoas pouco preparadas em Matemática pensam imediatamente que o problema fica resolvido duplicando-se a aresta do cubo, mas é fácil verificar o erro a que conduz esse procedimento.

### 2 — As Soluções dos Gregos

Não dispondo de simbolismo adequado e nem mesmo de um sistema de numeração que lhes facilitasse os cálculos, buscaram os matemáticos gregos, como era de seu hábito, uma solução puramente geométrica para o problema.

As soluções propostas por Arquitas de Tarento (pitagórico contemporâneo de Platão), por Eudóxio de Cnido (discípulo de Arquitas) e por Menecma (ou *Menaechmus* — discípulo de Eudóxio) conduzem ao estudo das três secções cônicas, cuja sistematização foi feita em um notável tratado publicado pelo grande Apolônio de Perga, que lhes deu inclusive os nomes pelos quais são até hoje conhecidas: elipse, hipérbole e parábola.

### 3 — As Cônicas e os Fenômenos Naturais

Quinhentos anos depois de Apolônio, o geômetra Pápus de Alexandria trouxe sua contribuição ao estudo das cônicas, após o que essa teoria foi estudada durante um milênio sem novos progressos e sem que se lhe descobrisse qualquer aplicação prática.

No entanto, um outro ramo do saber humano, a Astronomia, se vinha desenvolvendo, mercê do talento e do esforço de cientistas como Hiparco, Ptolomeu e Copérnico. Assim, quando Kepler <sup>(1)</sup> iniciou seus estudos, já se havia operado a transformação copernicana, que substituíra o sistema ptolomaico pelo sistema heliocêntrico, mas ainda se pensava que as órbitas planetárias eram circulares. Foi de seus profundos estudos de geômetra emérito e não menos notável astrônomo que surgiram as três leis conhecidas como leis de Kepler, uma das quais nos diz, por exemplo, serem as órbitas dos planetas elipses de que o Sol ocupa um dos focos.

Dos estudos posteriores de Newton <sup>(2)</sup> resultou a teoria da gravitação universal, uma das concepções básicas da Física, que, combinada com as leis gerais dos movimentos, possibilitou a explicação plena dos fenômenos astronômicos, permitindo, inclusive, deduzir que as trajetórias dos cometas são elíticas, parabólicas ou hiperbólicas.

Bastariam as aplicações citadas, tão importantes e vastas, para valorizar aos olhos dos aplicadores o estudo das cônicas; mas a verdade é que sua importância ressalta a cada instante em Perspectiva, na construção de sombras, no estudo dos movimentos centrais e das engrenagens elíticas, na teoria dos choques, em Balística (a parábola é a trajetória de um móvel lançado horizontal ou obliquamente no vácuo), em Pneumostática (a lei de Boyle se traduz matematicamente pela equação  $pV=K$  que representa uma hipérbole equilátera num sistema carte-

(1) Nasceu em 1571, na Alemanha.

(2) Nasceu em 1642, na Inglaterra.

siano ortogonal pov), em Hidrodinâmica, em Ótica, em Termodinâmica, em Eletricidade, em Resistência dos Materiais, etc., etc., para não falar das inúmeras contribuições ao estudo da própria Matemática, como é o caso, por exemplo, dos logaritmos chamados naturais ou hiperbólicos.

É assombroso que após 1800 anos de estudo apenas abstrato, a teoria das cônicas tenha sido relacionada de modo tão íntimo com os fenômenos naturais. Isto constitui uma grande lição<sup>(3)</sup>, que devem ter em vista todos os pesquisadores: não se deve deixar de lado o estudo de um fato novo, sob a alegação de que ele não encontra aplicações práticas.

#### 4 — O assunto desta Unidade

Nesta unidade vamos estudar as secções cônicas como lugares geométricos, isto é, partindo das propriedades que são comuns a seus pontos e que só eles possuem. Aprenderemos a justificar o traçado dessas curvas, a aproveitar os seus elementos de simetria, a traçar-lhes tangentes e normais por pontos dados, ou paralelos a uma direção dada.

Esse estudo os auxiliará inclusive na solução dos problemas gráficos, que lhes são dados na cadeira de Desenho.

---

(3) A história da ciência está cheia de outras análogas.

#### CONTROLE DA APRESENTAÇÃO DA UNIDADE

- 1 — Você vai resumir a apresentação da unidade, devendo para isso usar fichas.
- 2 — Não se esqueça das regras ensinadas para o seu preparo:
  - I — Destaca-se a idéia principal, que se coloca na primeira linha, vindo em seguida, entre parêntesis, as expressões complementares.
  - II — Na segunda linha e a partir da margem coloca-se o autor (sobrenome, nome), título da obra, nome do editor, local, data, edição, volume, capítulo, número de páginas.
  - III — Quando houver subtítulo, deve-se colocá-lo entre travessões logo após o título.
  - IV — Deixa-se agora uma linha em branco e inicia-se o resumo.
  - V — Quando o assunto exigir várias fichas, repita-se o cabeçalho, colocando-se no canto superior direito o número de ordem.
  - VI — Depois de prontas as fichas, deve-se classificá-las e incluí-las no fichário.

## PRIMEIRA SUBUNIDADE

### A ELIPSE

Você vai estudar os assuntos abaixo relacionados.

- 1 — Noções gerais sobre curvas planas.
- 2 — Elipse.
  - 2.1 — Definição — focos, distância focal e raios-vetores.
  - 2.2 — Traçado da curva, dados os dois focos e a constante  $2a$  (estude sobretudo o traçado por pontos).
  - 2.3 — Eixos de simetria da elipse.
  - 2.4 — Relação entre as constantes  $a, b, c$ .
  - 2.5 — Excentricidade.
  - 2.6 — Centro de simetria.
  - 2.7 — Pontos interiores e exteriores à elipse.
  - 2.8 — Pontos em que uma reta corta uma elipse (demonstra-se que são dois no máximo; donde se conclui que a elipse é uma curva convexa).
  - 2.9 — Circunferência principal e circunferências diretoras. (\*)
  - 2.10 — Propriedade da tangente: a tangente à elipse em um ponto forma ângulos iguais com os raios vetores desse ponto.

(\*) Geralmente os autores chamam: círculo principal e círculos diretores.

2.11 — Teorema de La Hire: a circunferência principal da elipse é o lugar geométrico das projeções ortogonais dos focos de uma elipse sobre as tangentes à curva.

2.12 — A circunferência diretora de centro em um foco como o lugar geométrico dos pontos simétricos do outro foco da elipse em relação às tangentes à curva.

2.13 — Teorema de Poncelet.

### NOTAS

- 1.º) Você dispõe de duas aulas para estudar este assunto.
- 2.º) Inicie o estudo com decisão e não esmoreça.
- 3.º) Depois de compreender as demonstrações, procure repeti-las; se sentir dificuldades estude novamente o assunto.
- 4.º) Se não conseguiu vencer com o próprio esforço todas as dificuldades, consulte o professor.
- 5.º) O primeiro estudo deve ser individual. Nos 20 minutos finais do segundo estudo, você poderá reunir-se com mais um ou dois colegas para discutir o assunto.
- 6.º) Fontes de consulta:

A — Livro texto.

MELLO CARVALHO, THALES — Matemática — Para os cursos Clássico e Científico — 1.ª série — Cia. Editora Nacional — São Paulo — 1953 — 8.ª edição.

B — Consulta suplementar.

I — BEZERRA, MANUEL JAIRO — Curso de Matemática — Primeiro Ano Ginasial — Clássico e Científico — Cia. Editora Nacional — São Paulo — 1953.

II — ROXO, E.; CUNHA, H. L.; PEIXOTO, R e DACORSO NETTO, C. — Matemática — 2.º ciclo — Editora Francisco Alves — Rio — 1953.

III — FERREIRA DE ABREU, ANTONIO — Apontamentos de Geometria — 5.ª parte — Petrópolis — 1920.

IV — REY PASTOR, J — Geometria — Segunda Parte — Colección Didáctica de Matemáticas Elementales — Buenos Aires — 1938 — (Cap. IV, n.º 8 — inclusive "Reseña Historica").

V — COMBEROUSSE, CHARLES DE ET ROUCHÉ, EUGÈNE — Traité de Géométrie — Nouveau tirage — Deuxième Partie — Gauthier Villars, éditeur — Paris — 1949.

VI — HADAMARD, JACQUES — Leçons de Géométrie — II — Nouvelle édition — Librairie Armand Colin — Paris — 1949.

**EXERCÍCIO DE ASSIMILAÇÃO DA 1.ª SUBUNIDADE**

1 — Complete as seguintes frases :

- 1.1 — A propriedade característica dos pontos de uma elipse é .....
- 1.2 — A elipse tem ..... eixos de simetria e ..... vértices.
- 1.3 — A elipse é uma curva convexa porque .....
- 1.4 — Um ponto de um plano é interior a uma elipse desse plano quando .....

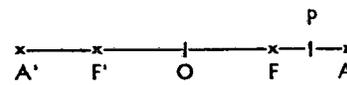
2 — Coloque F ou V diante de cada afirmação conforme ela seja falsa ou verdadeira, respectivamente.

- 2.1 — A elipse é um lugar geométrico.
- 2.2 — A excentricidade de uma elipse é menor do que 1.
- 2.3 — Quanto maior é a excentricidade de uma elipse tanto mais ela se aproxima de uma circunferência.
- 2.4 — A reta determinada por um ponto da elipse e um foco é uma normal.

3 — Resolva os seguintes exercícios :

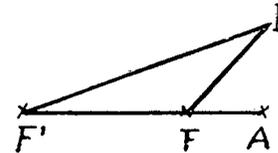
- 3.1 — Calcule a excentricidade de uma elipse cujos eixos medem  $2b = 6\text{cm}$  e  $2a = 10\text{cm}$ .

3.2 — Trace a elipse cujos eixos são dados na questão anterior.



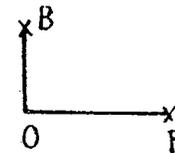
3.3 — Na figura ao lado F e F' são os focos, e A e A' são vértices de uma elipse.

No traçado da curva por pontos é possível utilizar o ponto P ?  
Por quê ?

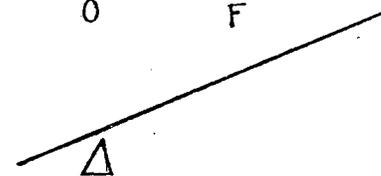


3.4 — Na figura ao lado F' e F são os focos, e A é um vértice de uma elipse. Partindo do ponto P encontrar mais três pontos da curva.

3.5 — Utilize os dados da questão anterior para traçar as circunferências diretoras, a circunferência principal, a tangente e a normal à elipse no ponto P (não é necessário traçar a curva).



3.6 — Na figura ao lado F é um foco, B é um vértice e O é o centro de uma elipse. Traçar as tangentes à curva, paralelas à direção  $\Delta$ .



- 3.7 — Prove que a excentricidade de uma elipse de eixos iguais a  $2a$  e  $2b$  é

$$\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Discuta esta fórmula.

- 3.8 — Demonstre que o semi-eixo menor de uma elipse é a média geométrica dos dois segmentos em que um dos seus focos divide o eixo maior.

## SEGUNDA SUBUNIDADE

### A HIPÉRBOLE

Use o livro texto para estudar os seguintes assuntos :

- 1 — Definição da hipérbole — focos, distância focal, raios vetores.
- 2 — Ramos da hipérbole.
- 3 — Traçado (principalmente o traçado por pontos).
- 4 — Eixos e centro de simetria da hipérbole.
- 5 — Relação entre  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .
- 6 — Excentricidade.
- 7 — Pontos interiores e exteriores à hipérbole.
- 8 — Circunferência principal e circunferências diretoras.
- 9 — Propriedade da tangente (análoga à propriedade 2.10 da primeira subunidade).
- 10 — Teorema de La Hire.

- 11 — A circunferência diretora de centro em um foco como lugar geométrico dos pontos simétricos do outro foco da hipérbole em relação às tangentes à curva.
- 12 — Assíntotas.
- 13 — Hipérbole equilátera.
- 14 — Hipérbolas conjugadas.
- 15 — Teorema de Poncelet.

NOTAS

- 1.º) Você dispõe de duas aulas para cumprir essa tarefa.
- 2.º) O primeiro estudo é individual. Nos 20 minutos finais do segundo estudo, você poderá formar grupos com mais um ou dois colegas e discutir o assunto estudado.
- 3.º) Aproveite bem o seu tempo.
- 4.º) Consulte a bibliografia citada na subunidade anterior. Na obra IV (Geometria de Rey Pastor, consulte o cap. V, n.º 7 — inclusive a “Resenha Historica”. Observe bem a fotografia da página 97 e preste atenção às observações feitas pelo autor).

**EXERCÍCIO DE ASSIMILAÇÃO DA 2.ª SUBUNIDADE**

1 — Complete as seguintes frases :

- 1.1 — A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano, tais que .....
- 1.2 — A hipérbole tem ..... eixos e ..... vértices.
- 1.3 — Uma hipérbole é equilátera quando .....
- 1.4 — Duas hipérbolas são conjugadas quando .....

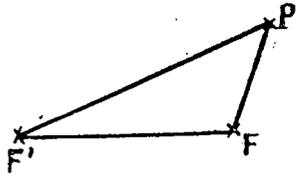
2 — Resolva as seguintes questões :



2.1 — Na figura ao lado A e A' são os vértices, e F e F' são os focos de uma hipérbole.

Trace a curva por pontos.

2.2 — É possível usar o ponto P na construção?  
Por quê?



2.3 — Na figura ao lado P é um ponto de uma hipérbole, cujos focos são F e F'. Partindo de P obter mais três pontos da curva.

2.4 — Trace a tangente e a normal à hipérbole da questão anterior no ponto P.



2.5 — Na figura ao lado P é um ponto de uma hipérbole cujos focos são F' e F e em que um dos vértices é A. Trace a curva e, em seguida, as tangentes que passam pelo ponto P.

2.6 — Construa uma hipérbole cujo eixo transversal mede 8 cm e cujo eixo não transversal mede 6 cm. Calcule a sua excentricidade e, em seguida, trace as suas assíntotas.

2.7 — Calcule a excentricidade de uma hipérbole equilátera.

2.8 — Demonstre que numa hipérbole equilátera as assíntotas são perpendiculares.

2.9 — Demonstre que a excentricidade de uma hipérbole pode ser calculada pela fórmula

$$\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Discuta esta fórmula.

2.10 — Demonstre que numa hipérbole o semi-eixo não transversal é a média proporcional entre os segmentos em que um dos vértices divide o segmento focal.

### TERCEIRA SUBUNIDADE

#### A PARÁBOLA

Estude no seu livro texto os assuntos abaixo indicados.

#### 1 — Parábola.

- 1.1 — Definição da parábola — foco, diretriz, parâmetro e raio vetor.
- 1.2 — Traçado.
- 1.3 — Eixo de simetria.
- 1.4 — Pontos interiores e exteriores à parábola.
- 1.5 — A parábola como limite de uma elipse.
- 1.6 — Propriedades da parábola (extensão das propriedades 2.10, 2.11 e 2.12 da elipse).

#### 2 — Secções cônicas.

- 2.1 — Generalidades.
- 2.2 — Teorema de Dandelin.

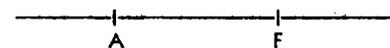
#### NOTAS

- 1.º) Esse estudo deve ser feito em uma aula.
- 2.º) Além das obras já citadas, consulte :  
XAVIER, AGLIBERTO — Secções cônicas — Rio — 1924.

### EXERCÍCIO DE ASSIMILAÇÃO DA 3.ª SUBUNIDADE

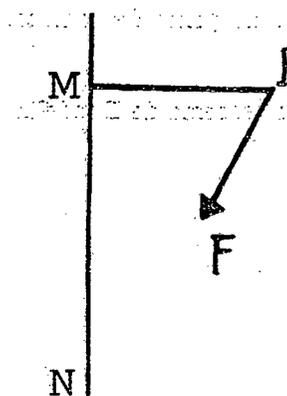
Resolva os seguintes exercícios :

- 1 — Na figura ao lado, o ponto A é o vértice e o ponto F é o foco de uma parábola.



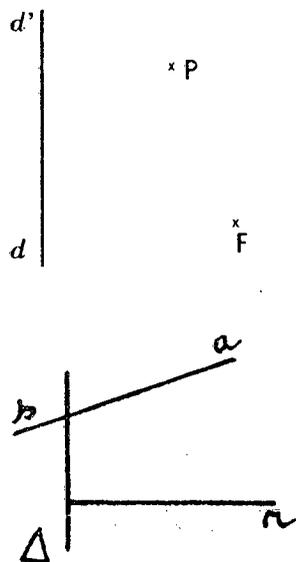
Trace a curva e encontre o seu parâmetro.

- 2 — O ponto P pertence a uma parábola da qual F é o foco.



Sabe-se que  $\overline{MP} = \overline{FP}$  e  $\widehat{PMN} = \pi/2$ .

Pede-se o traçado da tangente e da normal à curva no ponto P', simétrico de P em relação ao eixo da curva.



3 — Trace a parábola cuja diretriz é  $d'd$  e cujo foco é  $F$  e, em seguida, as suas tangentes que passam pelo ponto  $P$ .

4 — O parâmetro de uma parábola é igual a 5cm, sua diretriz é  $\Delta$  e seu eixo é  $r$ .

Trace a curva e suas tangentes paralelas à direção  $s$ .

5 — Demonstre que em uma parábola a distância do foco a uma tangente é a média geométrica entre o semiparâmetro e o raio vetor do ponto de contato.

6 — Prepare uma ficha resumo do teorema de Dandelin.

### ORGANIZAÇÃO DA UNIDADE E "RECITAÇÃO"

- 1 — Hoje vamos dar prosseguimento ao preparo das fichas relativas ao assunto exposto nesta unidade.
- 2 — A apresentação da unidade e o teorema de Dandelin já foram fichados em estudos anteriores. Vamos, portanto, fichar o assunto estudado nas três subunidades.
- 3 — É preciso não esquecer as regras relativas à apresentação material das fichas (foram recapituladas no teste de apresentação desta unidade).
- 4 — Além disso as fichas devem ser :
  - I — Produtos de elaboração pessoal (o aluno deve ler, entender e resumir com as suas próprias palavras e não se limitar a um trabalho de cópia).
  - II — Concisas — (devem conter apenas os conceitos fundamentais, apresentados por meio de poucas palavras).
  - III — Ordenadas (as idéias a resumir devem ser separadas por itens numerados ou em *introdução, desenvolvimento e conclusão*).
  - IV — Exatas (devem reproduzir sem deformações as idéias dos autores).

5 — Você dispõe de toda a aula de hoje e de 20 minutos da próxima aula.

6 — Nos 30 minutos finais da aula seguinte dois alunos farão exposições orais sobre os seguintes temas :

1.º — As cônicas (histórico, definição, propriedades gerais e aplicações).

2.º — O traçado das tangentes e normais à elipse, à hipérbole e à parábola.

### TESTES DE VERIFICAÇÃO

#### 1.ª questão

Complete as seguintes frases :

1.1 — Cortando-se uma superfície cônica de revolução por um plano que corte as duas folhas da superfície obtém-se uma cônica chamada .....

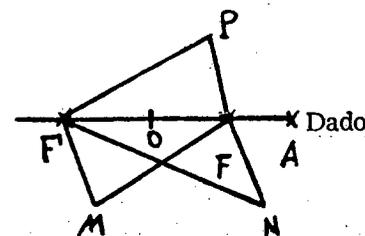
1.2 — Se o plano secante for paralelo a uma das geratrizes da superfície, a cônica obtida será uma .....

1.3 — Uma elipse pode ser encontrada por uma reta no máximo em ..... pontos.

1.4 — Os elementos de simetria de uma elipse, são : .....

#### 2.ª questão

Dê as posições dos pontos P, M e N em relação à elipse, cujos focos são F e F' e em que um dos vértices é A. Sabe-se que O é o meio de F'F.

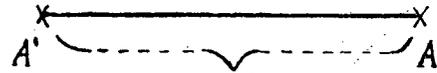


Dados

$$\begin{cases} \overline{PF} + \overline{PF'} = 2(\overline{OF} + \overline{FA}) \\ \overline{MF} + \overline{MF'} < 2 \overline{AO} \\ \overline{NF} + \overline{NF'} > \overline{PF} + \overline{PF'} \end{cases}$$

3.ª questão

O segmento  $A'A$  é o maior eixo de uma elipse cuja distância focal é de 5 cm.



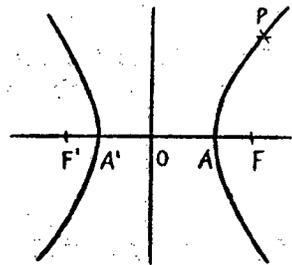
Construa a curva e trace as suas tangentes que passam pelo ponto P.

X  
P

4.ª questão

Demonstre a propriedade em que se baseou para o traçado da curva e enuncie a propriedade em que se apoiou para o traçado das tangentes.

5.ª questão



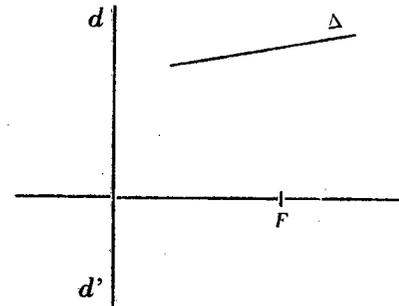
Ao lado está traçada uma hipérbole. Determine:

- o comprimento do seu eixo transverso;
- o comprimento do seu eixo não transverso;
- a distância focal;
- a excentricidade.

6.ª questão

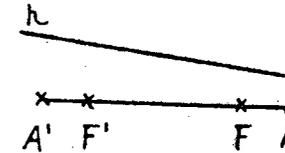
Trace a tangente à hipérbole da questão anterior no ponto P e enuncie a propriedade em que se baseia o traçado.

7.ª questão



A reta  $d'd$  e o ponto  $F$  são, respectivamente, a diretriz e o foco de uma parábola. Trace a curva e, em seguida, as suas tangentes paralelas à direção  $\Delta$ .

8.ª questão



Os pontos  $F'$  e  $F$  são os focos de uma elipse, da qual  $A'A$  são vértices.

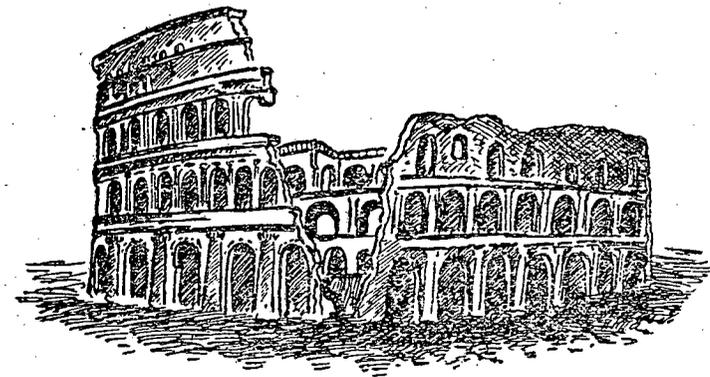
Deduza um processo que permita obter os pontos em que  $r$  corta a elipse independentemente do traçado da curva.

**UNIDADE DE HISTÓRIA GERAL**

**CURSO CIENTIFICO — 1.ª série**

**O LEGADO DOS ROMANOS**

**Daniel Valle Ribeiro**



*O Coliseu*

COLÉGIO NOVA FRIBURGO

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

CADEIRA : HISTÓRIA GERAL (ANTIGÜIDADE)

CURSO CIENTÍFICO — 1.ª SÉRIE

1954

PROF. DANIEL VALLE RIBEIRO

## UNIDADE VII — O LEGADO DOS ROMANOS

### Objetivos :

I — Promover as seguintes *compreensões* básicas :

- a) sentido da expansão romana e da unificação política da Europa;
- b) conseqüências políticas e sociais das conquistas romanas;
- c) processo evolutivo do Estado Romano (da República ao Império).

II — Favorecer a estruturação das seguintes *atitudes* :

- a) reconhecimento do valor do legado romano ao Mundo Moderno;
- b) de apreciação crítica dos valores positivos e negativos da civilização romana;
- c) de respeito à estrutura jurídica que herdamos de Roma.

III — Introduzir os alunos na *pesquisa bibliográfica*, através de confronto e crítica de textos históricos.

IV — Procurar desenvolver nos alunos o *interêsse* pelos estudos históricos e em especial pela Civilização Romana.

Subunidades :

1. ROMA : ORIGENS E EXPANSÃO
2. CONSEQUÊNCIAS POLÍTICAS E SOCIAIS DAS CONQUISTAS
3. EVOLUÇÃO DO PRINCIPADO
4. IMPÉRIO MILITAR

TESTE DE SONDAGEM

1. Que fatos da História Romana apresentaram para você maior interêsse quando estudou esta unidade no curso ginasial ?

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

2. Na sua opinião quais foram as grandes contribuições da civilização romana ao Mundo Moderno ?

.....  
.....  
.....

3. A que se pode atribuir a rápida expansão romana ?

.....  
.....

4. Por que a Realeza foi um periodo lendário ?

.....  
.....  
.....

5. Mencione a função dos :

questores .....  
pretores .....  
censores .....  
cônsules .....

6. Localize, com as denominações atuais, as seguintes partes do Império Romano :

a) Panônia .....  
b) Etrúria .....  
c) Magna Grécia .....  
d) Lácio .....  
e) Siracusa .....  
f) Numidia .....

7. Coloque em ordem cronológica :

Augusto .....  
Rômulo .....  
César .....  
Tibério Graco .....  
Vespasiano .....  
Trajano .....

## APRESENTAÇÃO DA UNIDADE

**Origens de Roma — SUA EXPANSÃO** — Antes de Roma ser fundada, a Itália já era habitada por diversos povos. Dentre estes salientavam-se os *etruscos* e os *helenos* da Magna Grécia, os quais tiveram especial influência na formação da civilização romana. Roma originou-se das povoações existentes entre os sete montes das margens do rio Tibre, fundada para servir de refúgio aos ataques dos etruscos à região do Lácio. Graças à sua situação geográfica e a outros fatores, rapidamente progrediu e submeteu toda a península. A unificação política da Europa fez-se pelas guerras, com as quais Roma se expandiu e aumentou seu território, passando de Cidade-Estado a Estado-Nação.

**A Crise Social e a Evolução do Principado** — A desigualdade social, exacerbada pelas conquistas da República, provocou lutas violentas entre *patricios* e *plebeus*, somente pacificadas pela LEI DAS DOZE TÁBUAS, pedra angular do Direito Romano. A organização política de Roma baseava-se na sua *unidade de govêrno*, tendo o Estado como órgão de administração e de defesa da coletividade. A *República* apresentou diversas instituições, como o Senado, o Consulado, a Pretura, a Censura e outras. Com o *Império*, que marcou o apogeu romano, o poder pessoal do imperador absorveu a atribuição dessas instituições. Apenas o Senado, órgão de equilíbrio e de conciliação, subsistiu intacto. O Estado Romano concentrou, então, nas mãos de um magistrado os três poderes : o *civil*, o *militar* e o *religioso*. OTÁVIO, ao criar o Império, recebeu ainda os títulos de *Augustus* e de *Princeps*. Conclui-se assim que o Império resultou de transições e não de golpe de Estado ou de pronunciamento militar.

**Esplendor e Decadência** — Depois do reinado brilhante de AUGUSTO, durante o qual Roma conheceu notável desenvolvimento intelectual, o Império atinge o apogeu político e econômico sob os *Antoninos*. É necessário esclarecer que êsse apogeu era produto de iniciativas do governo e de uma classe dominante privilegiada, em contraposição com as precárias condições econômico-sociais em que vivia a multidão desamparada.

A partir dos Antoninos começa a decadência, que culminou com o colapso frente aos bárbaros. Foram causas desse declínio: a enorme extensão do Império, o que dificultava sua administração; as lutas internas pela sucessão ao trono, verdadeira anarquia militar; a situação de esplendor dos patrícios, que lhes tirava o espírito de luta, chegando a contratar mercenários para lutar; e diversas causas de ordem moral. Contudo, devemos importante legado a êsse Império, que tombou ante as investidas dos bárbaros.

A criação do Estado deve-se a Roma. Foi ela que primeiro apresentou uma unidade administrativa, criando municípios com o mesmo governo; foi ela, também, que instituiu o Direito, iniciado pela Lei das Doze Tábuas, sua maior e mais preciosa contribuição.

#### CONTROLE DA APRESENTAÇÃO

Os alunos devem elaborar uma síntese pessoal da Apresentação da Unidade. Podem para êsse fim consultar uma Enciclopédia ou uma obra de divulgação histórica.

#### 1.ª SUBUNIDADE: ORIGENS E EXPANSÃO DE ROMA

- a) Situação geográfica da Península Itálica — seus primitivos habitantes
- b) Origens de Roma (lendária e provável)
- c) Influências das civilizações etrusca e grega na formação romana
- d) Estrutura político-social de Roma nos primórdios de sua civilização (Realeza e República)
- e) Fases da expansão romana: conquista da Itália e da bacia do Mediterrâneo.

#### TRABALHOS DE ASSIMILAÇÃO

1. Organize um esquema referente às origens de Roma e à época da Realeza (ALCINDO M. SOUZA — *História Geral*, p. 111).  
Não se prenda a fatos acessórios; assinale apenas o essencial. Recorra também às anotações de aula.
2. Faça um quadro sinótico da Expansão Romana, considerando em especial a guerra contra os cartagineses.  
Consulte, além do compêndio acima, BURNS, E. — *História da Civilização Ocidental*. Procure no índice as páginas correspondentes.
3. Observe o mapa explicativo da travessia dos Alpes por Anibal, que se encontra em KOCH, JULIUS — *História de Roma*, p. 75. Confronte-o com um mapa físico da região. Copie no Caderno Nobre o referido mapa explicativo.

## 2.ª SUBUNIDADE : CONSEQUÊNCIAS POLÍTICAS E SOCIAIS DAS CONQUISTAS

- a) Lutas sociais entre patrícios e plebeus — origens do Direito Romano
- b) Lutas civis — origem da ditadura política : Mário e Sila
- c) Idéia de Principado, com Pompeu, e de Monarquia com César (1.º triunvirato)
- d) Objetivos políticos de César.

### TRABALHOS DE ASSIMILAÇÃO

1. Organize um quadro sinótico referente às Lutas Sociais e Civis, subordinando os fatos essenciais aos acessórios. Consulte para êsse fim o livro-texto adotado (ps. 120 a 122); BURNS, E., op. cit., ps. 235, 242, 243, assim como os apontamentos de aula.
2. Elabore um quadro sinótico acêrca dos objetivos políticos de César. Utilize os dados que figuram às ps. 122 a 124 do livro-texto. Para compreender melhor o papel de César na vida política de Roma, consulte ainda BURNS (localize o assunto pelo índice). Esquematize apenas o essencial, salientando o sistema do Principado (POMPEU) e da Monarquia (CÉSAR).
3. Trace uma ligeira biografia de César, consultando os livros que preferir.

## 3.ª SUBUNIDADE : EVOLUÇÃO DO PRINCIPADO

- a) Situação de Roma após a morte de César
- b) Papel exercido por Otávio nos acontecimentos que culminaram com a criação do Império (2.º triunvirato e luta contra Marco Antônio)
- c) Império Romano e Estado Moderno
- d) Augusto e seus sucessores imediatos
- e) Os Antoninos e o apogeu político de Roma.

### TRABALHOS DE ASSIMILAÇÃO

1. Responda, no "caderno nobre", às seguintes perguntas :
  - a) Por que a morte de Júlio César não salvou a República ?
  - b) O Império nasceu de um golpe de Estado ? (Justifique sua resposta).
  - c) Quais as características do Império criado por Augusto ?
  - d) Mencione os principais fatos da época de Augusto, mostrando as condições de vida do povo.

Para realizar êsse trabalho consulte o livro-texto (página 124). Leia os trechos relativos ao Segundo Triunvirato e à Época de Augusto. Consulte, ainda, HOMO, L. — *Las Instituciones Políticas Romanas*, p. 257, para saber como se originou o regime imperial.

2. Organize um quadro sinótico relativo à época dos Antoninos, salientando a obra dos imperadores desse período. Consulte, para isso, o livro-texto, ps. 127 a 132.  
Não deixe de consultar também BURNS, E., op. cit., ps. 248 a 260.

**4.ª SUBUNIDADE: IMPÉRIO MILITAR**

- a) As lutas pelo poder — Diocleciano
- b) Difusão do Cristianismo — as perseguições
- c) Causas remotas e próximas da decadência romana.
- d) O legado romano.

**TRABALHOS DE ASSIMILAÇÃO**

1. Organize um quadro sinótico, abrangendo toda a última fase do Império Romano.

Além do livro-texto, consulte MATTOSO, A. G., *História da Civilização (Antigüidade)*, ps. 484-488, 507-512 e LIMA, OLIVEIRA — *História da Civilização* (ps. 143 a 150).

2. Faça uma redação, mostrando as causas substanciais da decadência romana e a contribuição de Roma ao Mundo Moderno.

Não deixe de consultar BURNS, E., op. cit., ps. 266 e 267.

**ORGANIZAÇÃO DA UNIDADE**

Cada aluno reorganizará todos os assuntos desta Unidade ao elaborar o quadro sinótico final, estabelecendo relações entre os temas estudados nas quatro subunidades.

**VERIFICAÇÃO DA UNIDADE**

1. Como o Reno e o Danúbio concorreram para manter por muito tempo as diferenças culturais entre os romanos e os bárbaros ?

Resp. ....  
.....  
.....  
.....  
.....

2. Em que se apoiou o poderio romano ?

Resp. ....  
.....  
.....

3. Explique por que os romanos, embora habitantes de uma península estreita, nunca foram predominantemente homens do mar ?

Resp. ....  
.....  
.....

4. Que assimilaram os romanos da civilização etrusca ?

Resp. ....  
.....

5. O período do apogeu romano, personificado por Augusto, corresponde a uma época de bem estar econômico-social para o povo ? Justifique.

Resp. ....  
.....

6. Explique como em pleno regime republicano existiu um "princeps" do Senado em Roma.

.....  
.....  
.....

Faça uma síntese relativa aos seguintes temas :

7. As lutas sociais e as origens do Direito Romano.
8. Modificações na estrutura política de Roma após as conquistas.
9. As origens do Império Romano.
10. Cristianismo em Roma.

### EXPOSIÇÃO DOS ALUNOS

Nas duas próximas aulas cada um dos quatro alunos indicados exporá à classe oralmente, durante vinte minutos, um dos temas mencionados (questões 7, 8, 9, 10 da prova de verificação), devendo dar ao assunto uma apresentação que demonstre um esforço pessoal, no sentido de integrar os frutos das diversas leituras que tenha efetuado. Os demais alunos escolherão um desses quatro temas para escrever um pequeno artigo, também de cunho pessoal. Os melhores trabalhos serão publicados no jornal do Colégio.

Publicações da CILEME, órgão do Instituto Nacional de Estudos Pedagógicos :

Publicação n.º 1 — **Acreditação de Escolas Secundárias nos Estados Unidos da América do Norte**, a cargo do Prof. Thales Mello Carvalho.

Publicação n.º 2 — **A Educação em Santa Catarina**, a cargo Prof. J. Roberto Moreira.

Publicação n.º 3 — **A Educação no Paraná**, a cargo do Prof. Erasmo Pilotto.

Publicação n.º 4 — **O Ensino por Unidades Didáticas — Seu Ensaio no Colégio Nova Friburgo** — a cargo da Prof.ª Irene Mello Carvalho.

C I L E M E

Campanha de Inquéritos e Levantamentos do Ensino Médio e Elementar.  
Rua Marechal Câmara, 160 - 9.º andar — Rio de Janeiro — Brasil